

Αγαπητοί μαθητές,

Ο Μαθηματικός του κάθε Τμήματος θα επικοινωνήσει μέχρι τις 25 Μαρτίου με τον Πρόεδρο ή κάποιον άλλο μαθητή σύνδεσμο του Τμήματος σας, ο οποίος με τη σειρά του θα σας ενημερώσει:

A) για οδηγίες και χρονοδιάγραμμα για επίλυση και διόρθωση των επαναληπτικών ασκήσεων που βρίσκονται πιο κάτω

B) για τρόπους τακτικής επικοινωνίας με τον Καθηγητή σας.

ΛΥΚΕΙΟ ΔΑΣΟΥΠΟΛΗΣ 2019 - 2020

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Συναρτήσεις

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \frac{4x}{3x-1} \quad (β) f(x) = \frac{5x+2}{x^2-5x+6}$$

$$(γ) f(x) = \sqrt{2x+4} \quad (δ) f(x) = \ln(4x-1)$$

$$(ε) f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x-3}} \quad (στ) ψ = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-1}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \frac{x-1}{x+4} \quad (β) ψ = 4 - 3\sin x \quad (γ) ψ = 4 + 3x - x^2 \quad (δ) f(x) = \frac{3x+1}{x-2}, x \geq 4$$

3. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις  $f: A \rightarrow R$  και  $g: B \rightarrow R$  είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R ώστε να είναι  $f = g$ .

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} \text{ και } g(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x}}$$

4. Να βρείτε το σύνολο τιμών και τον τύπο της  $f^{-1}(x)$  των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \frac{x-2}{x+1}, x > 3 \quad (β) f(x) = \ln(x+4)$$

5. Αν  $f(x) = x^2 + 3$  και  $g(x) = \sqrt{x-4}$  να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f \circ g, g \circ f$  και  $f \circ f$ .

6. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων της μορφής  $f: A \rightarrow f(A)$ . Αν ορίζεται να βρείτε το τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

$$(α) f(x) = \frac{x}{x+2} \quad (β) f(x) = e^{x-2} + 3$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους:  $f(x) = \ln(x+3)$  και  $g(x) = x^2 - 4$ . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $\frac{f}{g}$  και  $f \circ g$

### Απόλυτη τιμή

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $|2x - 1| = 7$       β)  $|x^2 - 1| = 15$       γ)  $|x + 3| + 7 = 0$

δ)  $|x - 4| - |x + 1| = 0$     ε)  $x^2 - 3|x| - 4 = 0$     στ)  $3|x - 1| = x + 5$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις: α)  $|4x - 3| < 5$     β)  $|x - 1| > 3$     γ)  $|2x - 1| < |x - 2|$

### Όρια συναρτήσεων

1. Να βρείτε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων αν υπάρχουν:

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}$       β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{4 - 5x^2}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x - 2}$       δ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 6}{x - 3}$

ε)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{8x^2 + 3}}{x}$       ζ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2 + 4x}$       η)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2x}{4x^2}$       θ)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{9 - x^2}$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x + e^{x-1}, & x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$  στο σημείο  $x_0 = 1$ .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + \beta x, & x < 2 \\ -2, & x = 2 \\ x^3 + \beta x^2 + 2a, & x > 2 \end{cases}$ . Να βρείτε τις σταθερές  $\alpha$  και  $\beta$  ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής.

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $e^x - x^3 + 2x - 3 = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

### Τέλεια επαγωγή λογική

1. Να αποδείξετε ότι: αν  $n \in \mathbb{N}$  είναι περιττός αριθμός, τότε και ο  $4n^3 + 2n - 1$  είναι περιττός.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει περιττός ακέραιος αριθμός, ο οποίος να εκφράζεται ως άθροισμα τριών άρτιων ακεραίων.

3. Να δείξετε, με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Να δείξετε ότι:  $2 + 6 + 10 + \dots + (4v - 2) = 2v^2, \forall v \in \mathbb{N}$ .
5. Να δείξετε ότι  $\forall v \geq 2$  ο αριθμός  $9^{v-2} - 1$  είναι πολλαπλάσιο του 8.

**Ακολουθίες .Αριθμητική Πρόοδος (Α .Π) - Γεωμετρική Πρόοδος (Γ. Π)**

1. Δίνεται η ακολουθία για την οποία ισχύει:  $a_1 = -4$  και  $a_{v+1} = a_v + 1$ . Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της και να την παραστήσετε γραφικά.
2. Δίνεται η ακολουθία  $a_v = \frac{4}{v+1}, v \in \mathbb{N}$
- α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.
- β) Να βρείτε το  $\lim a_v$  και να εξετάσετε αν είναι φραγμένη.
3. Το άθροισμα των  $v$  πρώτων όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο:  $\Sigma_v = 2^{v+1} - 2, v \in \mathbb{N}$
- α) Να δείξετε ότι  $a_v = 2^v$ .
- β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
4. Σε αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος και ο πέμπτος όρος έχουν άθροισμα 27, ενώ ο τέταρτος και ο έκτος όρος έχουν άθροισμα 36. Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο.
5. Ο τρίτος όρος αριθμητικής προόδου είναι 1 και ο έκτος όρος 7. Πόσους όρους πρέπει να πάρουμε για να έχουμε άθροισμα 60.
6. Έστω γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο τρίτος όρος είναι ίσος με 16 και ο όγδοος όρος της είναι ίσος με  $\frac{1}{2}$ . Να βρείτε το δέκατο πέμπτο όρο και το άθροισμα των απείρων όρων της προόδου
7. Το άθροισμα των 2 πρώτων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, με  $\lambda < 0$ , είναι 9 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 12. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των αρνητικών όρων της.
8. Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος (Γ. Π) και Αριθμητική Πρόοδος (Α .Π) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Α.Π ισούται με το λόγο της Γ.Π. Ο πέμπτος όρος της Α.Π είναι ίσος με -1

και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π είναι ίσο με το δεύτερο όρο της Α.Π. Να σχηματίσετε τις προόδους.

9. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με  $\alpha$  και το άθροισμα των  $k$  πρώτων όρων είναι μηδέν, δηλαδή  $\Sigma_k = 0$ . Να δείξετε ότι το άθροισμα των επόμενων  $\mu$  όρων είναι:

$$\Sigma_\mu = \frac{\alpha \cdot \mu(\kappa + \mu)}{(1 - \kappa)}$$

10. Σε αριθμητική πρόοδο με διαφορά  $\delta = 3$  ισχύει ότι  $\alpha_{\kappa+\lambda} = \alpha_\kappa + \alpha_\lambda$ , όπου  $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ . Να βρείτε το άθροισμα των 31 πρώτων όρων της πιο πάνω προόδου .

### Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

1. Να λύσετε την εξίσωση:  $4^x + 2^{x+3} = 3 \cdot 2^{x+1} + 3$

2. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_5 x - 2 \log_x 5 = 1$

3. Να λύσετε τη λογαριθμική εξίσωση:  $3 \log_8 x + 6 \log_x 2 = 5$

4. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log(16^x - 12 \cdot 4^x - 63) = 0$

5. Να λύσετε την εξίσωση:  $(1 - \log 2) \cdot \log_5 x = \log 3 - \log(x - 2)$

6. Να λύσετε την εξίσωση :  $(\log_3 x)^2 - 3^{\log_3 4} = \log_3 x + \log_3 \left(\frac{1}{81}\right)$

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \left(\frac{3-x}{3+x}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$

β) Να αποδείξετε ότι η  $f(x)$  είναι περιττή συνάρτηση

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f(x + 1) = 0$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α)  $4^{3x+1} = 32$     β)  $3^{x+1} + 9 = 30 \cdot 3^x$     γ)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-4} = \left(\frac{2}{7}\right)^{x+1}$

δ)  $\left(\log\left(\frac{1}{2}\right) x\right)^2 = \log\left(\frac{1}{2}\right) x^2$     ε)  $\log\left(\log\left(\frac{3x+3}{x-6}\right)\right) = 0$

9. Να λύσετε την εξίσωση:  $3 \cdot \log 2 + \log(2^x + 3^x) - \log 5 = x \cdot \log 2 + \log 7$

10. α) Να δείξετε ότι ισχύει:  $\log_2 3 \cdot 2 + \log_2 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + \log_2 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + \dots = 10$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(\log_2 3 \cdot 2 + \log_2 3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} + \log_2 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} + \dots)^{\log(x^2 - 2x)} = \log 100^x + \log \frac{1}{1000}$$

11. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 5^x$ , να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $f(x) = -5^x$ ,    β)  $g(x) = 5^x + 1$ ,    γ)  $k(x) = 5^{x-2}$

12. Με βάση την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \log_3 x$ , να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α)  $g(x) = 1 + \log_3 x$ ,    β)  $h(x) = \log_3(x - 2)$     γ)  $k(x) = 2 + \log_3(x + 1)$

### ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Να υπολογίσετε τις γωνίες τριγώνου  $AB\Gamma$  που έχει πλευρές  $\alpha = 2 \text{ cm}$ ,  $\beta = 2 \text{ cm}$ , και  $\gamma = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ .

2. Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $\alpha = 6 \text{ m}$ ,  $\beta = 6\sqrt{3} \text{ m}$  και εμβαδόν  $E = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες του αν  $\hat{\Gamma} < 90^\circ$  και την πλευρά του  $\gamma$ .

3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η ισότητα:  $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$

4. Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \tau\varepsilon\mu^2 \frac{\alpha}{2}$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{1 + \eta\mu 2\theta - \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{1 + \eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu 2\theta} = \sigma\phi\theta$

6. Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x} = \sigma\tau\varepsilon\mu 3x$

7. Να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης:  $\eta\mu(2x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

8. Να λύσετε την εξίσωση:  $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [0^\circ, 360^\circ]$ .

9. Να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu^2 2x - 8\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$

10. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης:  $\sigma\upsilon\nu 2x - 2\eta\mu 2x + 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ .

11. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η σχέση:  $\alpha + \beta = \gamma(\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B)$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

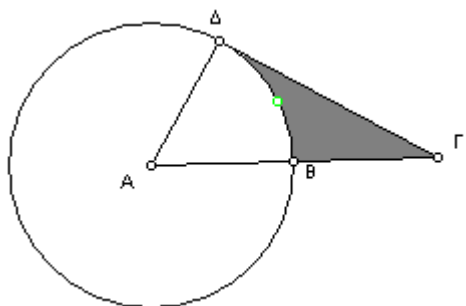
12. Αν  $A = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$  και  $B = \frac{\eta\mu 7x + \eta\mu x}{2\eta\mu 4x}$

α) Να δείξετε ότι  $A = 2$  και  $B = \sin 3x$

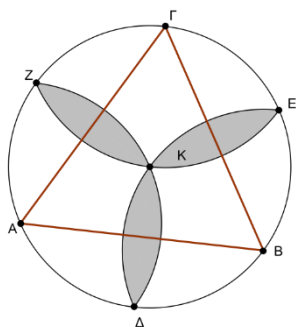
β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{A}{B} = 4$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

### Γεωμετρία

1. Στο πιο σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο  $A$  και ακτίνας  $R$  η  $\Gamma\Delta$  είναι εφαπτομένη και η γωνία  $\Delta\Gamma A = 30^\circ$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $R$  το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μέρους.



2. Σε κύκλο  $(K, R)$  είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με κέντρα τις κορυφές του τριγώνου και ακτίνα  $R$  γράφουμε τόξα μέσα στον κύκλο που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο των τριών φύλλων που σχηματίζονται.



3. Δίνεται κύκλος  $(K, R)$  και κανονικό τρίγωνο εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα την  $AB$  γράφουμε τόξο  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $R$ , το εμβαδό του μηνίσκου που ορίζεται από τα δύο τόξα  $B\Gamma$ .

4. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο  $AB = 2R$  και σημείο  $\Gamma$  στην ημιπεριφέρεια τέτοιο ώστε  $A\Gamma = \frac{AB}{3}$ . Οι εφαπτόμενες του ημικυκλίου στα  $A$  και  $B$  τέμνουν την εφαπτομένη του ημικυκλίου στο  $\Gamma$  στα σημεία  $P$  και  $\Sigma$  αντίστοιχα. Με κέντρα τα  $P$  και  $\Sigma$  και ακτίνες  $PA$  και  $\Sigma B$  αντίστοιχα, γράφουμε τόξα μέσα στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει του  $R$ .